第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 39 No. 6
Dec. 2022

文章编号:1000-4939(2022)06-1076-10

面向概率-区间混合可靠性分析的自适应共轭控制方法与应用

孟增[1],汪栋梁[1],郝鹏[2]

(1. 合肥工业大学土木与水利工程学院,230009 合肥;2. 大连理工大学工程力学系,116024 大连)

摘 要:复杂工程结构中往往包含多源不确定性,而概率-区间混合不确定性理论是处理这些不确定性因素的有效手段。但是,经典的概率-区间混合可靠性计算模型由双层优化循环嵌套组成,对于复杂工程问题存在计算成本过高和鲁棒性不足的问题。为了改进算法性能,提出了面向概率-区间混合可靠性分析的自适应共轭控制方法,该方法将前两次迭代方向与当前迭代点处的负梯度方向组合,同时加入控制因子对组合后的方向进行修正,改善其迭代点的下降方向,提高相应收敛速度,并通过可行下降方向的定义证明了修正后方向仍为优化问题的下降方向。此外,为防止迭代过程中产生数值振荡,进一步引入了 Wolfe-Powell 准则,保证控制因子自适应更新的同时增强了算法的鲁棒性。为了获得随机参数的上下界,基于超参数凸模型构造了相应的显式迭代公式。计算结果表明,该方法在解决高非线性问题时能有效地避免迭代过程中出现的振荡现象,与传统方法相比,不仅能满足精度需求,而且可以高效、稳定地求解可靠度指标。

关键词:结构可靠度;概率-区间混合不确定性分析;一次二阶矩;共轭方向法;自适应共轭控制

中图分类号:TB114.3 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.008

Adaptive conjugate control method for probability-interval hybrid reliability analysis and its engineering application

MENG Zeng[1], WANG Dongliang[1], HAO Peng[2]

(1. School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China;
2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, China)

Abstract: Complex engineering structures often contain multi-source uncertainties, while probability-interval hybrid uncertainty theory is an effective tool to deal with these uncertain parameters. However, the classical probability-interval hybrid reliability calculation model is composed of double nested optimization loops, which has the problems of expensive calculation cost and insufficient robustness for complex engineering problems. In order to improve the performance, this study proposes an adaptive conjugate control method for probability-interval hybrid reliability analysis. This method combines the decrease directions of previous two iteration steps with the negative gradient direction at the current iteration step. A control factor is also added to further modify the combined direction, aiming to improve the descent direction and

收稿日期:2022-07-04 **修回日期**:2022-10-10
基金项目:国家自然基金面上资助项目(No. 11972143)
通信作者:孟增,副教授。E-mail:mengz@hfut.edu.cn
引用格式:孟增,汪栋梁,郝鹏. 面向概率-区间混合可靠性分析的自适应共轭控制方法与应用[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1076-1085.
MENG Zeng, WANG Dongliang, HAO Peng. Adaptive conjugate control method for probability-interval hybrid reliability analysis and its engineering application[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6):1076-1085.

convergence speed. Besides, it is proved that the revised direction is still the descent direction of the optimization problem according to the definition of the feasible descent direction. Moreover, in order to prevent the numerical oscillation in the iterative process, the Wolfe-Powell criterion is introduced to enhance the robustness of the algorithm by adaptive update of control factor. To obtain the upper and lower bounds of random parameters, the corresponding explicit iterative formulas are constructed based on the super parametric convex model. The results show that the proposed method can effectively avoid the oscillation phenomenon in the iteration process when highly nonlinear problems are solved. Compared with the traditional method, the proposed method not only meets the requirement for accuracy, but also solves the reliability index efficiently and stably.

Key words: structural reliability; probability-interval hybrid uncertainty analysis; first order second moment; conjugate direction method; adaptive conjugate control

结构工程中存在的大量多源不确定性因素会对结构安全产生严重威胁[1-3]。而结构可靠性理论可以合理地处理这些多源不确定性参数,保证结构的安全性。一般来说,不确定性可以分为两类:随机不确定性和认知不确定性[4-5]。随机不确定性是指结构中存在的固有随机性,它不能通过知识或者数据的增加予以消除[6-7]。认知不确定性源于知识的匮乏或者简化,可以通过获取更多实验数据的手段来减少此类不确定性[8-9]。

概率方法适用于处理随机不确定性,其核心思想是根据大量的实验样本数据来获得结构的精确可靠度指标,经典的计算方法包括蒙特卡罗模拟法、矩方法、代理模型法和近似可靠度计算方法。蒙特卡罗模拟法操作简单且精度高,然而其高额计算成本严重阻碍了工程应用。为了减少抽样方法的计算量,学者们相继提出了多种改进的抽样方法,如重要抽样法[10]、方向抽样法[11]、子集模拟法等[12-13]。矩方法的求解思路是通过计算结构响应的高阶矩来获得失效概率,该类方法求解精度较高,但受样本点的位置影响较大[14]。代理模型法使用了显式数学模型对真实复杂结构进行全局近似,大幅提高了计算效率,但该类方法受样本点的影响较大,对于高维可靠性问题的适用性不强[15]。近似可靠度计算方法中代表性方法是 HL-RF 迭代算法[16],该算法因迭代公式简单、计算成本低而被广泛应用于可靠性分析。但对于高非线性问题,HL-RF 算法容易不收敛。对此,Yang[17]提出了基于混沌控制的 HL-RF 迭代算法,以实现对迭代步长进行稳定控制。亢战等[18]考虑到当前迭代点和它在极限状态曲面内法线的夹角,并通过该夹角来修正下一步的迭代点,从而实现快速稳定收敛。Gong 等[19]提出了有限步长迭代法,通过缩小迭代步长提高了可靠性分析的鲁棒性。孟增等[20]分析了 HL-RF 算法解决高非线性问题时发散的原因,指出了迭代点振荡存在方向性特征,并随后提出了基于修正混沌控制的 HL-RF 算法增强了其鲁棒性。

非概率方法的优势在于对实验样本数量的依赖性低[21-23],因此在处理认知不确定问题时受到学者们的青睐,其中经典的非概率模型包括区间模型和凸模型。区间模型将不确定变量描述为区间形式,通过处理后得到非概率可靠度指标[24]。唐嘉昌等[25]在区间模型的基础上建立了区间鲁棒优化模型,有效地处理了带有不确定参数的非线性结构鲁棒性优化问题。Wang 等[26]基于区间模型对超音速机翼结构进行了非概率可靠性优化设计,结果表明,安全系数法在描述设计过程中的不确定性方面存在缺陷,且区间模型可以精确地表征少量实验样本的不确定性参数,更接近实际工程问题。Gurav 等[27]发现区间模型给出的最危险情况是取每个变量的极值。江涛等[28]采用反射运算技术求解了区间模型的非概率可靠度指标。相比于区间模型,凸模型则侧重于描述随机参数间的相关性[29],因此近年来受到了广泛关注。Ganzerli 等[30]基于凸模型提出了一种不确定荷载下的结构优化设计方法。亢战等[31]认为基于凸模型的最优拓扑构型设计比确定性的拓扑构型设计更为安全有效。由于可供选择的经典非概率模型过少,Meng 等[32]构造出更广义的超参数凸模型,实现了有限实验样本的高置信表征。

实际工程中往往同时包含随机和认知不确定性,因此学者们把概率模型和非概率模型结合后提出了混合不确定性模型。Elishakoff 等[33]深入研究了概率模型和凸模型的混合不确定性问题。Qiu 等[34]将概率方法与区间分析结合,并通过两个桁架系统证明了该方法的可行性。Kang 等[35]将多源不

确定性参数分为随机和非概率参数两类，并将他们融合后提出了混合可靠性建模方法。刘海波等[36]建立了含概率与区间混合不确定性参数的系统可靠性分析方法，并指出该方法只需要少量的实验数据即可确保系统安全，适合于复杂工程结构。Jiang 等[37]进一步指出，在实验数据不足的情况下，一些重要的分布参数（如均值、标准差等）无法直接确定而是以区间的形式存在。此时，概率-区间混合不确定性模型是处理这类问题的有效手段。

尽管概率-区间混合不确定性模型比概率和非概率模型更适合于处理复杂的工程问题，但是算法性能仍然不足。概率-区间混合不确定性模型通常需要内外层反复计算，因此其计算成本过高。此外，对于高非线性函数，概率-区间混合不确定性模型存在迭代振荡和收敛性问题。因此，亟待发展一种高性能的计算方法，在增强混合模型收敛性的同时降低计算成本。

为了实现上述目标，本研究提出了基于自适应共轭控制的概率-区间混合可靠性计算方法。首先，提出了自适应共轭控制方法，其核心思想是将前两次的迭代方向与当前迭代点处的负梯度方向组合形成修正的共轭方向；其次，把该方法拓展至概率-区间混合可靠性计算中来控制其迭代的方向，保证算法鲁棒性的同时提高其计算效率；最后，为了获得随机参数的上下界，基于超参数凸模型构造了相应显式的迭代公式。

1 概率模型、区间模型与概率-区间混合不确定性模型

1.1 概率模型

概率模型适用于处理随机不确定性，其需要大量的数据信息来获得精确的随机参数，相应结构的失效概率定义如下[38]。

$$\begin{aligned} P_f &= P[G(\boldsymbol{x}) \leqslant 0] \\ &= \int_{G(\boldsymbol{x})\leqslant 0} f_X(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= F_G(0) \end{aligned} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$代表结构的 n 维随机参数；$f_X(\boldsymbol{x})$和 $F_G(\cdot)$分别表示功能函数 $G(\boldsymbol{x})$的概率密度函数和累计分布函数，当 $G(\boldsymbol{x})>0$ 时表示结构安全。实际工程中往往难以直接求解上述高维积分，因此通常采用一次可靠度方法来计算失效概率和可靠度指标 β。在进行可靠性分析之前，需要通过 Rosenblatt 变换将随机变量 $\boldsymbol{x}$ 从原始空间转换到标准正态空间，则功能函数从 $G(\boldsymbol{x})$转到 $g(\boldsymbol{u})$，其中 $g(\boldsymbol{u})$表示 $G(\boldsymbol{x})$在标准正态空间下的功能函数。因此，β 的几何意义就是在标准正态空间中坐标原点到极限状态曲面的最小距离。其数值计算可归结为以下优化问题。

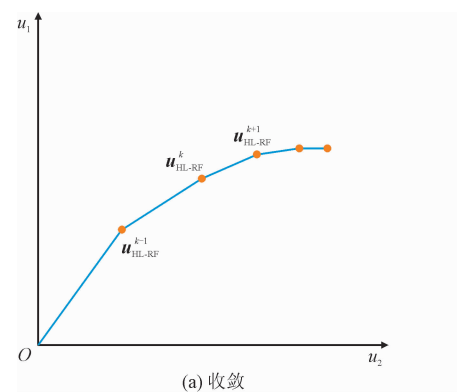
$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{u}} \beta = \|\boldsymbol{u}\| \\ \text{s.t.}\ g(\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

上述优化问题常用 HL-RF 算法求解，其迭代公式如下。

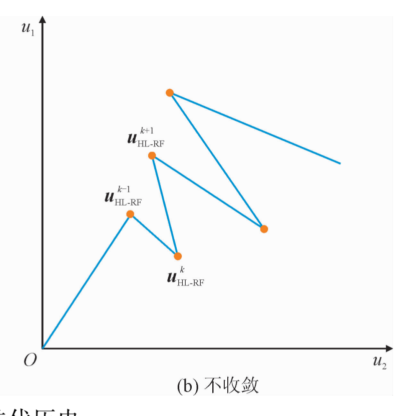
$$\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k+1} = -\frac{\beta^{k+1}\nabla g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})}{\|\nabla g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})\|} \tag{3}$$

$$\beta^{k+1} = \frac{g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k}) - \nabla g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k}}{\|\nabla g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})\|} \tag{4}$$

其中，$\nabla g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})$表示 $g(\boldsymbol{u}_{\text{HL-RF}}^{k})$的梯度向量。HL-RF 算法迭代公式简单、计算成本低，但对于强非线性问题，容易不收敛。如图 1 所示，HL-R 算法在二维空间中会出现不收敛问题[39]。因此，学者们提出了不同的改进方法[40]，但这些改进算法都只考虑了随机不确定性，没有考虑到混合不确定性问题。



(a) 收敛



(b) 不收敛

图 1 两种典型的迭代历史

Fig. 1 Two typical iteration histories

1.2　区间模型

非概率方法因为对实验样本不敏感而常被用于处理认知不确定性参数。区间模型是常见的非概率模型,其计算公式可以表示为[24]

$$\begin{cases} \min\limits_{x} G(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma})) \\ \text{s. t. } \boldsymbol{x}^L \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^U \end{cases} \tag{5}$$

为方便计算,可以将式(5)的区间参数用 $q_i = (x_i - x_{mi})/x_{ri}(i=1,2,3,\cdots,n)$ 进行量化,x_{mi} 和 x_{ri} 分别代表随机参数区间的中点和半径,则式(5)转换为

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{q}} g(\boldsymbol{q}) \\ \text{s. t. } \max\{|q_1|,|q_2|,|q_3|,\cdots,|q_n|\} \leqslant 1 \end{cases} \tag{6}$$

其中:$\boldsymbol{q}$ 是归一化的不确定变量;$g(\boldsymbol{q})$ 表示变量转换后的功能函数。对于 $\boldsymbol{q}$ 空间中的二维问题,其形状是一个边长为 2 的正方形,如图 2 所示。

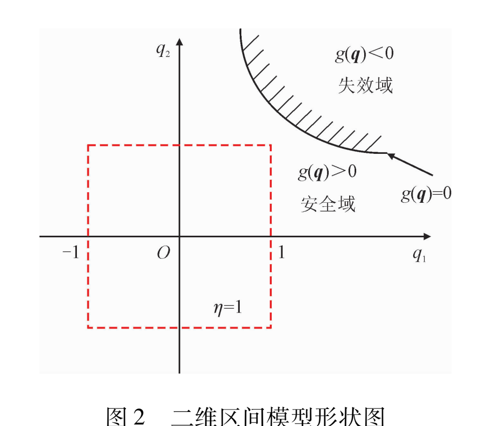


图 2　二维区间模型形状图

Fig. 2　The two-dimensional interval model shape graph

1.3　概率-区间混合不确定性模型

概率-区间混合不确定性模型综合了概率和区间模型的优势而被用于处理复杂工程中的混合不确定性参数。该模型中涉及到内外两层嵌套的优化循环[41]:外层循环求解可靠度指标的上下界,内层循环根据区间参数寻找到功能函数的上下界。其中,可靠度指标下界 $\underline{\beta}$ 的求解模型为

$$\begin{cases} \underline{\beta} = \min\limits_{\boldsymbol{u}} \|\boldsymbol{u}\| \\ \text{s. t. } \underline{g}(\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \underline{G}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma})) = \min\limits_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma})) \\ \text{s. t. } \boldsymbol{x}^L \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^U \end{cases} \tag{8}$$

可靠度指标上界 $\bar{\beta}$ 的求解模型为

$$\begin{cases} \bar{\beta} = \min\limits_{\boldsymbol{u}} \|\boldsymbol{u}\| \\ \text{s. t. } \bar{g}(\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \bar{G}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma})) = \max\limits_{x} G(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma})) \\ \text{s. t. } \boldsymbol{x}^L \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^U \end{cases} \tag{10}$$

2　基于自适应共轭控制的概率-区间混合可靠性计算方法

2.1　自适应共轭控制方法

共轭方向法通过将当前迭代点处的负梯度方向与上一步迭代方向组合后形成新的下降方向,实现快速收敛的效果[42]。但是对于混合可靠性计算问题,共轭方向不一定为最佳下降方向,且由于可靠度指标振荡沿 β 的径向,对于整体步长控制会带来额外计算成本。因此本研究提出自适应共轭控制方法。如图 3 所示,CD 表示共轭方向法,AC 表示自适应共轭控制方法。自适应共轭控制方法用前两次迭代方向对当前迭代方向进行修正,并加入控制因子对其进行控制,提高算法的鲁棒性和计算效率。此外,由于振荡方向沿 β 的径向,可以通过 $(\beta^k \boldsymbol{d}^{k+1})/\|\boldsymbol{d}^{k+1}\|$ 保证其在径向上 β 的长度。因此,自适应共轭控制方法的公式可表示为

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1} = \beta^k \frac{\boldsymbol{d}^{k+1}}{\|\boldsymbol{d}^{k+1}\|}, \\ \boldsymbol{d}^{k+1} = -\frac{\nabla g^k}{\|\nabla g^k\|} + \kappa^k \left(\frac{\boldsymbol{d}^k}{\|\boldsymbol{d}^k\|} + \delta^k \frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|} \right), \\ \delta^k = \frac{1}{(\beta^k)^2}, \\ \beta^k = \frac{g^k - (\nabla g^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^k}{\|\nabla g^k\|} \end{gathered} \tag{11}$$

其中:κ^k 为控制因子,起到对共轭方向修正的作用;为防止上一步迭代方向对当前迭代方向修正过当,δ^k 的上限设置为 0.5;g^k 为 $g(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^k)$;$\nabla g^k$ 为 $\nabla g(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^k)$。

当功能函数振荡时,即 $g^{k+1} - g^k > 0$。为找到最优下降方向,可以引入 Wolfe-Powell 准则自适应控制 κ^k 大小。具体表示如下。

$$f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1})=(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k}+c\,(g^{k})^{2},$$

$$\kappa^{k+1}=\begin{cases}0.5\kappa^{k} & f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k}+\alpha^{k}\boldsymbol{d}^{k})\leqslant f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})+\alpha^{k}\rho\,\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}\\ 2\kappa^{k} & \nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k}+\alpha^{k}\boldsymbol{d}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}\geqslant\sigma\,\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}\\ \kappa^{k} & \text{else}\end{cases}\tag{12}$$

其中：$f(\boldsymbol{u}^{k+1})$是罚函数；α^{k} 是迭代步长，即为 β^{k}；$c=10^{10}$；$0<\rho<1$；$\rho<\sigma<1$。

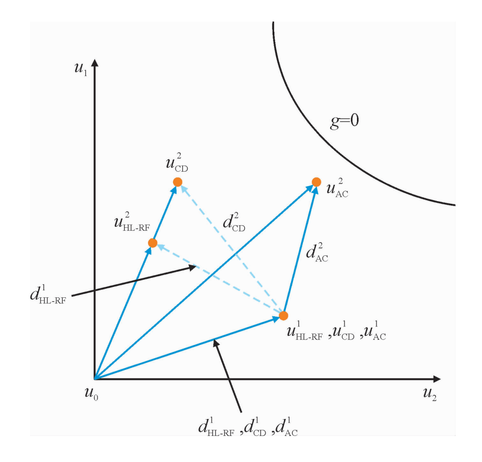


图 3 自适应共轭控制方法迭代历史

Fig. 3 The iterative history of adaptive conjugate control method

引理：如果满足 $c>\psi$，$\kappa^{k}>\omega$，且 $\delta^{k}\to0$（其中 ω 和 ψ 的值见式（14）～（15）），则 $\boldsymbol{d}^{k+1}$ 为 $f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1})$ 的下降方向，即$\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k+1}<0$。

证明：根据式（12），罚函数对$\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}$的灵敏度为

$$\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1})=2\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k}+2cg^{k}\,\nabla g^{k}\tag{13}$$

令

$$-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\omega\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)=0\tag{14}$$

$$(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}+\psi g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}=0\tag{15}$$

根据下降方向的定义，当$(\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k+1}<0$ 时，$\boldsymbol{d}^{k+1}$为 $f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1})$的下降方向。

$$\begin{aligned}&(\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k+1}=\\&2\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)+\\&2cg^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)\end{aligned}\tag{16}$$

考虑到最可能失效点处 $g^{k}=0$。因此，当 $g^{k}>0$ 时，g^{k} 必须要下降，此时$(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}<0$；当 $g^{k}<0$ 时，g^{k} 必须要上升，此时$(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}>0$。所以

$$g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k}<0\tag{17}$$

由于 $\boldsymbol{d}^{k-1}$为上一步迭代方向且 $\delta^{k}\to0$，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}\left(g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}\right)=\\&\mathrm{sign}\left(g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)\end{aligned}$$

因为 $\kappa^{k}>\omega$，所以

$$\begin{aligned}&g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)<\\&g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\omega\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)=0\end{aligned}\tag{18}$$

此时，若 $c>\psi$，$\kappa^{k}>\omega$，且 $\delta^{k}\to0$。将式（18）带入到式（16）中，得

$$\begin{aligned}&(\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k+1}=\\&2\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)+\\&2cg^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)<\\&2\,(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)+\\&2\psi g^{k}\,(\nabla g^{k})^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\nabla g^{k}}{\|\nabla g^{k}\|}+\kappa^{k}\left(\frac{\boldsymbol{d}^{k}}{\|\boldsymbol{d}^{k}\|}+\delta^{k}\frac{\boldsymbol{d}^{k-1}}{\|\boldsymbol{d}^{k-1}\|}\right)\right)=0\end{aligned}\tag{19}$$

综上所述，当 $\kappa^{k}>\omega$，$c>\psi$ 且 $\delta^{k}\to0$ 时，$(\nabla f(\boldsymbol{u}_{\mathrm{AC}}^{k+1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k+1}<0$。说明 $\boldsymbol{d}^{k+1}$为可靠性指标的下降方向，同时也证明了自适应共轭控制方法的可行性。

对于概率-区间混合不确定性模型，其外层优化可以通过自适应共轭控制方法计算，对内层优化，以求解$\underline{\beta}$ 为例，考虑到 $\max\{|q_1|,|q_2|,|q_3|,\cdots,|q_n|\}=\lim\limits_{p\to\infty}\|\boldsymbol{q}\|_p\leqslant1$，则 $\underline{\beta}$ 的求解问题可以转换为超参数凸模型的求解问题，即

$$\begin{cases}\min\limits_{q}\ g(\boldsymbol{q})\\ \text{s. t.}\ \lim\limits_{p\to\infty}\|\boldsymbol{q}\|_p\leqslant1\end{cases}\tag{20}$$

其中：$\boldsymbol{q}$ 是非概率空间中归一化的不确定性变量；p 需要设置为足够大的正数以保证计算精度，本研究 p 为 1 000。由式（20）的 Karush-Kuhn-Tucker 最优条件，可以推导出以下迭代公式[32]。

$$\underline{q}_i=-\mathrm{sign}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\left|\dfrac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right|}{\left\|\dfrac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\right\|_{\frac{p}{1-p}}}\right)^{\frac{1}{1-p}}\quad(i=1,\cdots,n)\tag{21}$$

其中 n 表示随机参数的数量。同理，模型内层优化

迭代式为

$$\bar{q}_i = \text{sign}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\left|\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right|}{\left\|\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial q}\right\|_{\frac{p}{1-p}}}\right)^{\frac{1}{1-p}} \quad (i=1,\cdots,n) \tag{22}$$

2.2　灵敏度分析

在可靠性计算中灵敏度分析必不可少，使用有限差分法可以直接获得$\partial g(\boldsymbol{q}^k)/\partial q_i^k$。但对于涉及有限元分析的复杂工程结构，有限差分法的计算成本比较大，此时可以用摄动法进行有限元灵敏度分析[29]。对于静力问题，结构平衡方程可表述为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \tag{23}$$

向量 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0 + \Delta\boldsymbol{q}$ 由一个不确定变量$\boldsymbol{q}_0$ 和一个微小摄动 $\Delta\boldsymbol{q}$ 组成。$\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 表示整体刚度矩阵，$\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R}^{n\times 1}$ 表示节点位移向量，$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^{n\times 1}$ 表示外部荷载向量。$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 对$\boldsymbol{q}_0$ 的一阶泰勒展开式分别为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}_0) + \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial q_i}\Delta q_i \tag{24}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}_0) + \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial q_i}\Delta q_i \tag{25}$$

将式(24)～(25)代入式(23)中，分别考虑零阶无穷小量和一阶无穷小量，可得到$\partial \boldsymbol{U}/\partial q_i^k$。根据链式法则，$\partial g(\boldsymbol{q}^k)/\partial q_i^k$ 可以通过以下公式计算。

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{q}^k)}{\partial q_i^k} = \frac{\partial g(\boldsymbol{q}^k)}{\partial \boldsymbol{U}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial q_i^k} \tag{26}$$

同理可得

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{u}^k)}{\partial u_i^k} = \frac{\partial g(\boldsymbol{u}^k)}{\partial \boldsymbol{U}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial u_i^k} \tag{27}$$

此外，也能采用摄动法推导获得应力约束的灵敏度。

2.3　计算流程

本研究所提方法的计算流程图如图 4 所示，计算步骤概述如下。

1)定义功能函数 $g(\boldsymbol{x})$。设置最大迭代次数为 200，$k=0$，$\rho=600$，$\varepsilon=10^{-6}$，$\kappa^0=1$。

2)将随机变量归一化处理得到 $\boldsymbol{q}$。

3)通过式(21)～(22)计算归一化随机变量 $\boldsymbol{q}$ 的上下界。

4)通过 Rosenblatt 变换将 $\boldsymbol{q}$ 的上下界转化到标准正态空间。

5)根据式(11)计算可靠度指标上下界。

6)若迭代过程中产生振荡，则使用 Wolfe-Powell 准则自适应更新 κ 的大小。

7)计算前后两次迭代点之间的误差 $\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{k-1}\| / \|\boldsymbol{x}^k\| \leqslant \varepsilon$。如果满足误差要求则停止迭代，如果不满足则转至步骤(2)重复计算直至满足收敛要求。

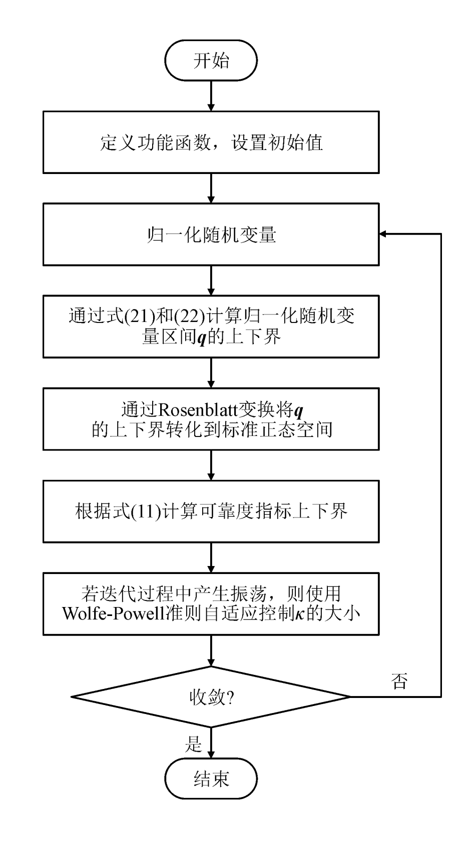


图 4　基于自适应共轭控制的概率-区间混合可靠性计算方法

Fig. 4　The probability-interval hybrid uncertainty reliability calculation method based on adaptive conjugate control

3　算　例

在本节中，通过一个数学算例、一个矩形悬臂梁算例和一个工业机器人应用来验证本研究所提方法的效率和精度，并分别与序列二次规划(sequential quadratic programming，SQP)算法、HL-RF 算法、混沌控制(chaos control，CC)方法和混沌共轭稳定性转换方法(chaotic conjugate stability transformation method，CCSTM)进行对比。所有算法收敛精度为 $\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{k-1}\| / \|\boldsymbol{x}^k\| \leqslant 10^{-6}$；最大迭代次数 200；$\lambda=0.1$；$\kappa^0=1$；$N_{\text{call}}$表示性能函数调用次数。对于自适应共轭控制方法，矩形悬臂梁算例的灵敏度计算方式为摄动法，其余均采用有限差分法。

3.1 二维非线性功能函数

第一个算例是一个二维非线性功能函数,随机变量 $x_1 \sim N(\mu_{x1},\sigma_{x1})$ 和 $x_2 \sim N(\mu_{x2},\sigma_{x2})$ 是服从正态分布的两个随机参数。$\mu_{xi}=[\mu_i-0.1\sigma_i,\mu_i+0.1\sigma_i]$,$\sigma_{xi}=[\sigma_i-0.1\sigma_i,\sigma_i+0.1\sigma_i]$,$i=1,2$ 是随机参数的波动区间,其中 $(\mu_1,\mu_2)=(10,9.9)$,$(\sigma_1,\sigma_2)=(5,5)$。计算 β 下界和上界的初始迭代点分别设置为 $\mu_i-0.1\sigma_i$ 和 $\mu_i+0.1\sigma_i$。功能函数定义为

$$G(\boldsymbol{x})=x_1^{\,3}+x_1^{\,2}x_2+x_2^{\,3}-18 \tag{28}$$

表 1 中分别列出了 5 种不同方法的计算结果。由表可知,HL-RF 算法和混沌共轭稳定性转换方法在迭代过程中会出现数值不稳定现象,导致迭代无法收敛。混沌控制方法达到最大迭代次数仍未收敛到最可能失效点。SQP 算法能稳定收敛到最可能失效点,计算结果也与本研究所提方法相同,但其函数调用次数较多。尽管自适应共轭控制方法在求解过程中同样出现过数值不稳定现象,但利用自适应共轭下降方向克服了收敛性困难的问题。结果表明 Wolfe-Powell 准则能自适应控制 κ 的大小从而找到更合适的迭代方向,在保证算法稳健性的同时提高了计算效率。表 2 中展示出在不同初始迭代点下本研究方法的计算结果。从表中可以看出自适应共轭控制方法对初始点的位置不敏感。

表 1 算例 1 各方法计算结果

Tab. 1 The calculation results of each method of the first example

算法	$\underline{\beta}$	N_{call}	$\overline{\beta}$	N_{call}
SQP	2.218	108	2.397	96
HL-RF	–	–	–	–
CC	–	–	–	–
CCSTM	–	–	–	–
Proposed	2.218	80	2.397	68

表 2 算例 1 不同初始点计算结果

Tab. 2 The calculation results of different initial points of the first example

初始点	$\underline{\beta}$	N_{call}	$\overline{\beta}$	N_{call}
[5,4.9]	2.218	75	2.396	82
[10,9.9]	2.218	80	2.397	67
[15,14.9]	2.218	86	2.397	66
[20,19.9]	2.218	86	2.397	66

3.2 矩形悬臂梁

本算例考虑一个三维悬臂梁,并通过有限元分析获取结构响应。如图 5 所示,梁的长为 640 mm,宽为 200 mm,厚度为 50 mm,左端固定,右端受不确定荷载 F。悬臂梁的最大允许位移不超过 3.8 mm。表 3 中列出了梁各随机参数的大小和分布,随机参数波动区间为 $\mu_{xi}=[\mu_i-0.1\sigma_i,\mu_i+0.1\sigma_i]$,$\sigma_{xi}=[\sigma_i-0.1\sigma_i,\sigma_i+0.1\sigma_i]$,$i=1,2,3$。$(\mu_i-0.1\sigma_i)$ 和 $(\mu_i+0.1\sigma_i)$ 分别为计算 β 下界和上界的初始点。功能函数定义为[32]

$$G=3.8-\Delta(E,v) \tag{29}$$

其中:E 是杨氏模量;v 是泊松比。

计算结果如表 4 所示。可以看出所有方法都能稳定收敛,且 HL-RF 算法、混沌控制方法和混沌共轭稳定性转换方法算出的 β 区间与本研究方法计算结果相同。但本研究方法的计算效率约为 HL-RF、混沌控制和混沌共轭稳定性算法的 1.5 倍、16 倍和 14 倍。此外,相较于 SQP 算法,本研究方法的效率提高了 11 倍以上,且可以计算得到最佳的 β 区间。尽管本研究方法在计算过程中会出现数值振荡现象,但通过自适应更新 κ 的数值解决了该问题。因此,自适应共轭控制方法对于本算例是非常有效和精确的。

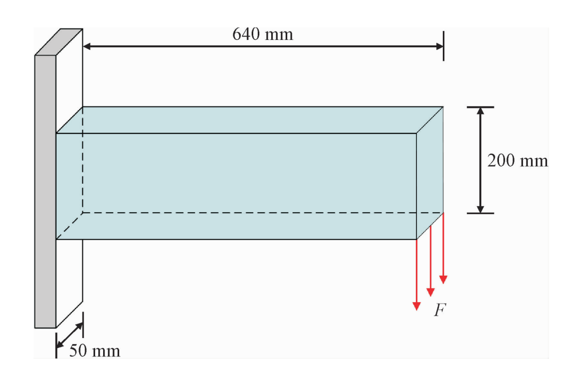


图 5 矩形悬臂梁结构示意图

Fig. 5 The structural diagram of rectangular cantilever beam

表 3 矩形悬臂梁随机参数分布

Tab. 3 Random parameter distribution of rectangular cantilever beam

参数	i	μ_i	σ_i	分布
E/GPa	1	210	5	正态
v	2	0.3	0.01	正态
F/kN	3	200	20	正态

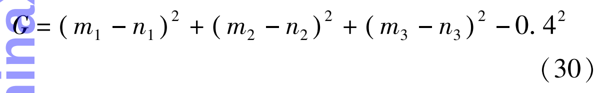
表 4　算例 2 各方法计算结果

Tab. 4　The calculation results of each method of the second example

算法	$\underline{\beta}$	N_{call}	$\bar{\beta}$	N_{call}
SQP	2.881	288	3.393	340
HL-RF	2.765	36	3.529	44
CC	2.765	452	3.529	460
CCSTM	2.765	408	3.528	408
Proposed	2.765	26	3.529	28

3.3　六自由度工业串联机器人

本算例是一个六自由度工业串联机器人，它通过一系列连杆相互连接，如图 6 ~ 7 所示。机器人末端执行器的位置精度是机器人重要的性能指标之一，其定义为实际位置(m_1, m_2, m_3)与末端执行器所需位置(n_1, n_2, n_3)的偏差。表 5 中列出了机器人各随机参数的大小和分布。每个连杆的长度与前三个关节角度被定义为服从极值 I 分布的随机参数。由于后三个关节角度对位置可靠性的影响较小，在此被定义为确定性变量。$\mu_{xi} = [\mu_i - 0.1\sigma_i, \mu_i + 0.1\sigma_i]$，$\sigma_{xi} = [\sigma_i - 0.1\sigma_i, \sigma_i + 0.1\sigma_i]$，$i = 1, 2, 3, \cdots, 9$ 为随机参数的任一波动区间。计算 β 下界和上界的初始点分别设置为($\mu_i - 0.1\sigma_i$)和($\mu_i + 0.1\sigma_i$)。功能函数为[43]



$$G = (m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2 - 0.4^2 \tag{30}$$

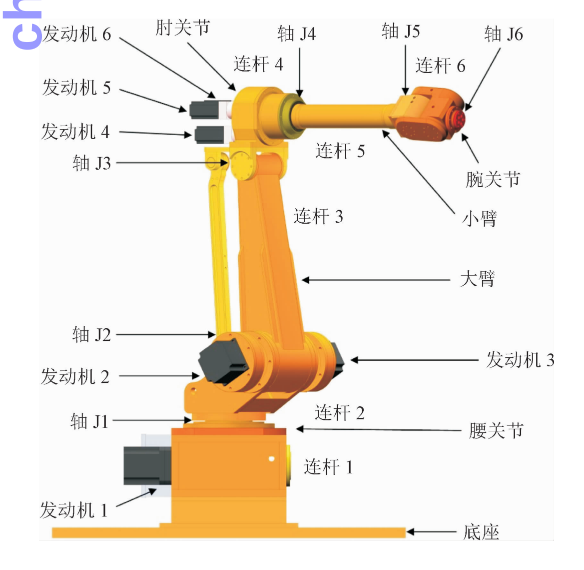


图 6　六自由度串联工业机器人结构示意图

Fig. 6　The structure diagram of 6-DOF series industrial robot

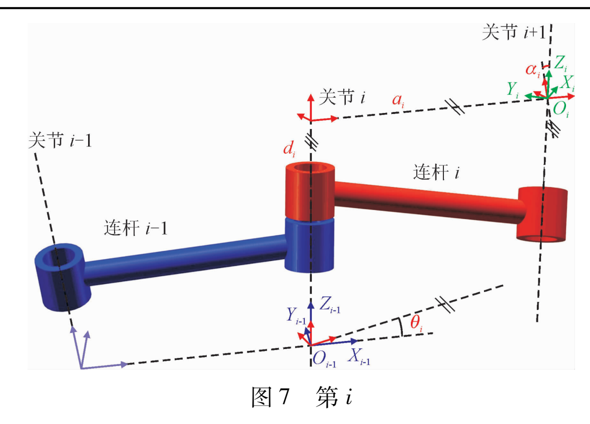


图 7　第 i

Fig. 7　The schematic diagram of the coordinate system of the ith connecting rod

表 6 中展示了 5 种不同方法的计算结果。如表所示，SQP 算法不能完整地计算得到 β 区间，这表明对于复杂的功能函数，SQP 算法的鲁棒性相对较弱。HL-RF 算法、混沌控制方法、混沌共轭稳定性转换方法和基于自适应共轭控制方法具有更好的鲁棒性。与 HL-RF 算法和混沌控制方法比，自适应共轭控制方法的计算效率明显提高。混沌共轭稳定性转换方法的计算结果与其他方法相比误差较大，且该方法的计算效率过低。因此，自适应共轭控制方法具有非常明显的效率和鲁棒性优势，也为处理混合不确定性问题提供了有效的计算工具。

表 5　六自由度串联工业机器人随机参数分布

Tab. 5　Random parameter distribution of 6-DOF series industrial robot

参数	i	μ_i	σ_i	分布
L_1/mm	1	585	0.050	极值 I
L_2/mm	2	181	0.055	极值 I
L_3/mm	3	665	0.015	极值 I
L_4/mm	4	724.5	0.014	极值 I
L_5/mm	5	0	0.050	极值 I
L_6/mm	6	90	0.010	极值 I
θ_1/(°)	7	−14.5	5.7×10^{-4}	极值 I
θ_2/(°)	8	34.6	1.5×10^{-3}	极值 I
θ_3/(°)	9	−10.2	2.9×10^{-3}	极值 I

表 6　算例 3 各方法计算结果

Tab. 6　The calculation results of each method of the third example

算法	$\underline{\beta}$	N_{call}	$\bar{\beta}$	N_{call}
SQP	–	–	3.037	480
HL-RF	1.531	130	3.074	160
CC	1.531	1.220×10^3	4.074	1.270×10^3
CCSTM	1.897	1.011×10^3	3.826	1.011×10^3
Proposed	1.532	62	4.075	82

4 总 结

本研究针对实际工程中普遍存在的混合不确定性问题展开研究。首先,在共轭方向法的启发下,提出了自适应共轭控制方法,并将其应用到概率-区间混合可靠性分析中。自适应共轭控制方法考虑了迭代点振荡时的方向性规律,将前两次迭代方向与当前迭代点处的负梯度方向组合,并加入了控制因子将组合后的方向进行修正,从而大幅提高了计算效率。同时,根据可行下降方向的定义,证明了修正后的方向为可靠度指标的下降方向。其次,采用 Wolfe-Powell 准则自适应改变控制因子的大小,克服了计算过程中的数值振荡和不收敛问题。最后,为了获得随机参数的上下界,基于超参数凸模型构造了相应的显式迭代公式。此外,通过一个数学算例、一个有限元算例和一个工业机器人应用验证了自适应共轭控制方法在处理混合可靠性问题的有效性。结果表明,对于高非线性问题,自适应共轭控制方法可以有效地避免计算过程中的振荡现象,满足了计算精度要求的同时大幅增强了算法的效率和鲁棒性。

参考文献:

[1] 蒋沅,公成龙,吕科,等. 基于自适应模糊补偿的不确定性机器人 CNF 控制[J]. 振动与冲击,2020,39(8):106-111.
JIANG Yuan,GONG Chenglong,LÜ Ke,et al. Adaptive fuzzy compensator based CNF control for uncertain robot manipulators[J]. Journal of vibration and shock,2020,39(8):106-111(in Chinese).

[2] 黄悦琛,宋长青,郭荣化. 基于广义多项式混沌展开的无人机飞行性能不确定性分析[J]. 飞行力学,2021,39(4):25-32.
HUANG Yuechen, SONG Changqing, GUO Ronghua. Uncertainty analysis of unmanned aerial vehicle flight performance using general polynomial chaos expansion[J]. Flight dynamics,2021,39(4):25-32(in Chinese).

[3] 王栋,高伟峰. 载荷位置不确定条件下结构稳健性拓扑优化设计[J]. 应用力学学报,2020,37(3):969-974.
WANG Dong,GAO Weifeng. Robust topology optimization of continuum structures with load position uncertainty[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(3):969-974(in Chinese).

[4] 张磊,胡震. 潜水器载人舱的不确定性测度计算方法研究[J]. 船舶力学,2020,24(2):197-207.
ZHANG Lei,HU Zhen. Application of mixed uncertainty analysis method in manned cabin of submersible[J]. Journal of ship mechanics,2020,24(2):197-207(in Chinese).

[5] 蒋琛,邱浩波,高亮. 随机不确定性下的可靠性设计优化研究进展[J]. 中国机械工程,2020,31(2):190-205.
JIANG Chen,QIU Haobo,GAO Liang. Research progressesin reliability-based design optimization under aleatory uncertainties[J]. China mechanical engineering,2020,31(2):190-205(in Chinese).

[6] 李宗超,高孟潭,孙吉泽,等. 相对局部区域震源参数随机不确定性经验关系研究[J]. 地震学报,2021,43(4):483-497.
LI Zongchao,GAO Mengtan,SUN Jize,et al. Empirical relationship of stochastic uncertainty of source parameters in relative local area[J]. Acta seismologica Sinica,2021,43(4):483-497(in Chinese).

[7] 王涛,李正良,范文亮. 基于扩展型共轭无迹变换的随机不确定性传播分析方法[J]. 工程力学,2021,38(8):15-23.
WANG Tao,LI Zhengliang,FAN Wenliang. An uncertainty propagation analysis method for stochastic system based on extended conjugate unscented transform[J]. Engineering mechanics,2021,38(8):15-23(in Chinese).

[8] 聂凯,孟庆海. 面向仿真推演的认知不确定性仿真建模范式[J]. 舰船电子工程,2020,40(12):70-73.
NIE Kai, MENG Qinghai. Cognitive uncertainty simulation and modeling paradigm oriented to simulationdeduction[J]. Ship electronic engineering,2020,40(12):70-73(in Chinese).

[9] 万志强,陈建兵. 数据稀缺与更新条件下基于概率密度演化-测度变换的认知不确定性量化分析[J]. 工程力学,2020,37(1):34-42.
WAN Zhiqiang,CHEN Jianbing. Quantification of epistemic uncertainty due to data sparsity and updating based on the framework via synthesizing probability density evolution method and change of probability measure[J]. Engineering mechanics,2020,37(1):34-42(in Chinese).

[10] BAI B,GUO Z W,ZHOU C,et al. Application of adaptive reliability importance sampling-based extended domain PSO on single mode failure in reliability engineering[J]. Information sciences,2021,546:42-59.

[11] 宋述芳,吕震宙,郑春青. 结构可靠性灵敏度分析的方向(重要)抽样法[J]. 固体力学学报,2008,29(3):264-271.
SONG Shufang,LÜ Zhenzhou,ZHENG Chunqing. Directional simulation for sensitivity analysis of structural reliability[J]. Chinese journal of solid mechanics,2008,29(3):264-271(in Chinese).

[12] 张嘉文,雷卫东,贺少辉. 运营热力隧道衬砌结构可靠度分析及剩余寿命预测研究[J]. 现代隧道技术,2020,57(6):93-100.
ZHANG Jiawen,LEI Weidong,HE Shaohui. Analysis on the reliability and prediction of residual life of lining structure of the heat supply tunnel[J]. Modern tunnelling technology,2020,57(6):93-100(in Chinese).

[13] 贾少敏,王子琦,陈华霆,等. 多点激励下减震桥梁结构抗震可靠度分析的哈密顿蒙特卡洛子集模拟法[J]. 振动工程学报,2021,34(2):357-363.
JIA Shaomin, WANG Ziqi, CHEN Huating, et al. Hamiltonian Monte Carlo based subset simulation for reliability analysis of energy-dissipation bridge structures with viscous dampers under multi-support seismic excitations[J]. Journal of vibration engineering,2021,34(2):357-363(in Chinese).

[14] 李正良,祖云飞,范文亮,等. 基于自适应点估计和最大熵原理的结构体系多构件可靠度分析[J]. 工程力学,2019,36(5):166-175.
LI Zhengliang,ZU Yunfei,FAN Wenliang,et al. Reliability analysis of multi-components in structural system based on the adaptive point estimate method and the principle of maximum entropy[J]. Engineering mechanics,2019,36(5):166-175(in Chinese).

[15] 周通,彭勇波,李杰. 结构可靠度分析的概率密度演化理论——自适应代理模型方法[J]. 振动工程学报,2020,33(5):

1035-1043.
ZHOU Tong, PENG Yongbo, LI Jie. Structural reliability analysis using probability density evolution method and adaptive surrogate model[J]. Journal of vibration engineering, 2020, 33(5): 1035-1043(in Chinese).

[16] ZHONG C T, WANG M F, DANG C, et al. Structural reliability assessment by salp swarm algorithm – based FORM[J]. Quality and reliability engineering international, 2020, 36(4): 1224-1244.

[17] YANG D X. Chaos control for numerical instability of first order reliability method[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2010, 15(10): 3131-3141.

[18] 亢战,罗阳军. 计算结构可靠度指标的修正迭代算法[J]. 工程力学,2008,25(11):20-26.
KANG Zhan, LUO Yangjun. A modified iteration algorithm for structural reliability index evaluation[J]. Engineering mechanics, 2008, 25(11): 20-26(in Chinese).

[19] GONG J X, YI P. A robust iterative algorithm for structural reliability analysis[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2011, 43(4): 519-527.

[20] 孟增,李刚. 基于修正混沌控制的一次二阶矩可靠度算法[J]. 工程力学,2015,32(12):21-26.
MENG Zeng, LI Gang. Modified chaos control-based first order second moment reliability method[J]. Engineering mechanics, 2015, 32(12): 21-26(in Chinese).

[21] WANG X J, ELISHAKOFF I, QIU Z P. Experimental data have to decide which of the nonprobabilistic uncertainty descriptions—convex modeling or interval analysis – to utilize[J]. Journal of applied mechanics, 2008, 75(4): 041018.

[22] HAO P, WANG Y T, LIU C, et al. A novel non-probabilistic reliability-based design optimization algorithm using enhanced chaos control method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2017, 318: 572-593.

[23] QIU Z P, WANG X J. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach[J]. International journal of solids and structures, 2003, 40(20): 5423-5439.

[24] 乔心州,吕震宙. 基于区间模型的结构非概率可靠性优化[J]. 应用力学学报,2012,29(6):682-686.
QIAO Xinzhou, LÜ Zhenzhou. Non-probabilistic reliability optimization of structures based on interval model[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2012, 29(6): 682-686(in Chinese).

[25] 唐嘉昌,姜潮,龙湘云,等. 一种针对不确定性结构的区间鲁棒性优化方法[J]. 中国科学(技术科学),2019,49(7):787-802.
TANG Jiachang, JIANG Chao, LONG Xiangyun, et al. An interval robust optimization method for uncertain structures[J]. Scientia Sinica(technologica), 2019, 49(7): 787-802(in Chinese).

[26] WANG X J, SHI Q H, FAN W C, et al. Comparison of the reliability-based and safety factor methods for structural design[J]. Applied mathematical modelling, 2019, 72: 68-84.

[27] GURAV S P, GOOSEN J F L, VANKEULEN F. Bounded-but-unknown uncertainty optimization using design sensitivities and parallel computing: Application to MEMS[J]. Computers & structures, 2005, 83(14): 1134-1149.

[28] 江涛,陈建军,张弛江. 区间模型非概率可靠性指标的仿射算法[J]. 机械强度,2007,29(2):251-255.
JIANG Tao, CHEN Jianjun, ZHANG Chijiang. Non-probabilistic reliability index and affine arithmetic[J]. Journal of mechanical strength, 2007, 29(2): 251-255(in Chinese).

[29] MENG Z, ZHANG Z H, ZHOU H L. A novel experimental data-driven exponential convex model for reliability assessment with uncertain-but-bounded parameters[J]. Applied mathematical modelling, 2020, 77: 773-787.

[30] GANZERLI S, PANTELIDES C P. Optimum structural design via convex modelsuperposition[J]. Computers & structures, 2000, 74(6): 639-647.

[31] 罗阳军,亢战,蔡坤. 考虑非概率可靠性的结构柔顺度拓扑优化设计[J]. 计算力学学报,2011,28(6):821-826.
LUO Yangjun, KANG Zhan, CAI Kun. A compliance based topology optimization design of structures considering non-probabilistic reliability[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2011, 28(6): 821-826(in Chinese).

[32] MENG Z, ZHOU H L. New target performance approach for a super parametric convex model of non-probabilistic reliability-based design optimization[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2018, 339: 644-662.

[33] ELISHAKOFF I, LIN Y K, ZHU L P. Probabilistic and convexmodelling of acoustically excited structures[M]. New York: Elsevier, 2013.

[34] QIU Z P, YANG D, ELISHAKOFF I. Probabilistic interval reliability of structural systems[J]. International journal of solids and structures, 2008, 45(10): 2850-2860.

[35] KANG Z, LUO Y J, LI A. On non-probabilistic reliability-based design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters[J]. Structural safety, 2011, 33(3): 196-205.

[36] 刘海波,姜潮,郑静,等. 含概率与区间混合不确定性的系统可靠性分析方法[J]. 力学学报,2017,49(2):456-466.
LIU Haibo, JIANG Chao, ZHENG Jing, et al. A system reliability analysis method for structures with probability and interval mixed uncertainty[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2017, 49(2): 456-466(in Chinese).

[37] JIANG C, ZHENG J, HAN X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with bothaleatory and epistemic uncertainties: a review[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2018, 57(6): 2485-2502.

[38] 易平. 概率结构优化设计的高效算法研究[D]. 大连:大连理工大学,2007.

[39] LEE J O, YANG Y S, RUY W S. A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural designoptimization[J]. Computers & structures, 2002, 80(3/4): 257-269.

[40] KESHTEGAR B. Chaotic conjugate stability transformation method for structural reliabilityanalysis[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2016, 310: 866-885.

[41] JIANG C, LI W X, HAN X, et al. Structural reliability analysis based on random distributions with interval parameters[J]. Computers & structures, 2011, 89(23/24): 2292-2302.

[42] 简金宝,刘鹏杰,江羡珍. 一个充分下降的谱三项共轭梯度法[J]. 应用数学学报,2020,43(6):1000-1012.
JIAN Jinbao, LIU Pengjie, JIANG Xianzhen. A spectral three-term conjugate gradient method with sufficient descent property[J]. Acta mathematicae applicatae Sinica, 2020, 43(6): 1000-1012(in Chinese).

[43] ZHANG D Q, HAN X. Kinematic reliability analysis of robotic manipulator[J]. Journal of mechanical design, 2020, 142(4): 044502.

（编辑　黄崇亚　李坤璐）